Coorporación Educacional A&G
Colegio El Prado
Cooperativa nro.7029-Pudahuel
www.colegioelprado.cl
direccioncolegioelprado@gmail.com
RBD: 24790-1

Guía III. Ejercitación de Funciones

Marzo 2020

4TO MEDIO- *Plan Común-Matemáticas*

Prof. Herma Casanova Morales

Nombre: ____ **Fecha:** __________

OBJETIVO:

- Sintetizar lo visto en las otras guías.
- Introducir el Concepto de Función Inversa.
- Ejercitar con los conceptos de Dominio, Recorrido, Inyectividad, Sobreyectividad, Biyectividad y Función Inversa.

INSTRUCCIONES:Responda cada una de las preguntas en la guía, haciendo el desarrollo de cada una de ellas en el cuaderno.

1. Definición de Función

Definición 1. Una FUNCIÓN f es una relación entre dos conjuntos A y B, de modo que a todo elemento de A le corresponde un solo elemento en B.

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & b = f(a) \end{array}$$

donde $a \in A, b \in B$ (esto se lee: *'a' pertenece a A* y *'b' pertenece a B*).
De este modo, reciben los nombres:

A:	Dominio de f	a:	Variable Independiente	Preimagen
B:	Codominio de f	b:	Variable Dependiente	Imagen

Si $f(a) = b$, entonces b es imagen de a bajo f y a es preimagen de b bajo f

Definición 2. El *recorrido* de una función f es el subconjunto del Codominio que contiene a todas las imágenes de f y nada más. O sea

$$Recf = \{b \in B \text{ tales que exite un elemento } a \in A \text{ con } f(a) = b\}$$

Ejemplo **1.** Sea f la relación tal que a cada número natural le asigna su doble.

- $A = \mathbb{N}$ Dominio de f
- $B = \mathbb{N}$ Codominio de f. Puede ser cualquier conjunto que contenga *a los dobles de los números naturales.*
- f es función pues TODO número natural tiene un número que es su doble y es único.
- $f(8) = 16$, la imagen de 8 es 16 y la preimagen de 16 es 8.
- La regla de asignación en este caso es $f(x) = 2x$

Ejemplo 2. En el ejemplo anterior, dijimos que la función $f(x) = 2x$ tendría el codominio $B = \mathbb{N}$.
Consideremos $3 \in \mathbb{N} = B$. ¿Está el 3 en el $Recf$, es decir, existe algun $a \in A$ se cumple ue $f(a) = 3$? Reformulando, ¿existe algun número natural cuyo doble sea 3?. No, por ende, el 3 no pertenece al recorrido ($3 \notin Recf$)

Nota 1. *El ejemplo anterior nos suguiere que no siempre ocurre que Codominio $B = Recf$. Sin embargo, siempre ocurre que el recorrido es parte del codominio ($Recf \subseteq$ Codominio)*

Ejemplo 3. Sea r la relación tal que a todo número racional le asigna su representación como fracción.

- $A = \mathbb{Q}$ Conj. Partida
- $B = \mathbb{Q}$ Conj. Llegada
- r NO es función, pues, tomemos, por ejemplo el racional $0,5$. r le asignará su representación como función, pero existe más de una, o sea:

$0,5 = \dfrac{1}{2}$
$0,5 = \dfrac{5}{10}$
$0,5 = \dfrac{6}{12}$
...
por lo que $r(0,5) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10} = ...$

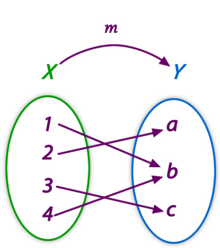
1.1. Ejercicios

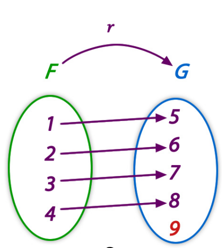
1. Lectura Págs 82-85.
2. Actividad Pág 86.

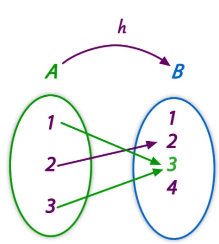
---

2. Tipos de Función

En los ejercicios anteriores hemos podido ver que hay funciones tales que dos valores distintos del Dominio son enviados al mismo valor por la función, o lo que es lo mismo, valores del Codomidio que tienen más de una preimangen, como es el caso de m (abajo)
Por otra parte, existen funciones que para ciertos valores en el Codominio, no existen preimagen como es el caso del 9 con la función r.
Como lo muestra h, pueden pasar ambas cosas.







Segun esto, clasificaremos a las funciones:

Definición 3. Diremos que una función es INYECTIVA o UNO A UNO 1-1 si cualquiera dos elementos de A siempre tienen imágenes distintas.

Ejemplo 4. Sea g la función que a cada número le asigna su triple menos 1. Esto es:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x-1 \end{array}$$

Veamos que es inyectiva:

Supongamos que a y b son dos números distintos	$a \neq b$
$\hookrightarrow$ al multiplicarlos por 3, también éstos serán números distintos.	$3a \neq 3b$
$\hookrightarrow$ Al restarle 1 a estos números distintos, también serán distintos	$3a-1 \neq 3b-1$
$\hookrightarrow$ Esto es, las imágenes son distintas	$g(a) \neq g(b)$

Ejemplo 5. Sea h la función que a cada número le asigna su cuadrado, esto es:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

¿Es inyectiva? ¿Para dos números distintos, sus cuadrados pueden ser iguales? Piense en 5 y -5

Definición 4. Diremos que una función es SOBREYECTIVAsi todo elemento de B es imagen de algun elemento en A

Ejemplo 6. Tomemos la función anterior $h(x) = x^2$. ¿Qué posibles valores puede tomar x^2? ¿cuáles no? Piense ahora en los números negativos.

Ejemplo 7. Consideremos la función $f(x) = 3x$ en los números Reales $\mathbb{R}$.

Para ver si es sobreyectiva, es necesario preguntarse si cualquier número en $\mathbb{R}$ puede ser una imagen de f. En otras palabras, si cualquier número puede escribirse como $3x$.

Piense en un número, por ejemplo, 936. ¿Se puede escribir como 3 veces otro número? En efecto, sería la imagen bajo f de 312. ¿Y el número en que usted pensó? Generalice.

Definición 5. Diremos que una función es BIYECTIVA si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

2.1. Ejercicios

1. Lectura Págs 92-95.

2. Actividad Págs 96-97.

3. Operatoria de Funciones

Tal como lo hacemos con los números, podemos operar las funciones mediante la suma y la resta, la multiplicación y la división, simplemente operando los resultados luego de evaluar las funciones. Por ejemplo:

Ejemplo 8. Sea $f(x) = 5x - 1$ y $g(x) = 3x^2$. Entonces $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$	$(f+g)(x)$
0	$5{\cdot}0 - 1 = -1$	$3{\cdot}0^2 = 0$	-1+0	-1
-2	$5{\cdot}(-2) - 1 = -11$	$3{\cdot}(-2)^2 = 12$	-11+12	1
1	$5{\cdot}1 - 1 = 4$	$3{\cdot}1^2 = 3$	4+3	7

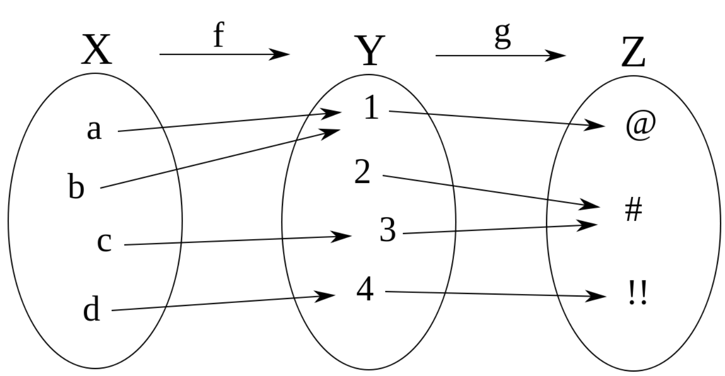
Definición 6. Se definen las operatorias básicas en las funciones por:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x), g(x) \neq 0$

3.1. Ejercicios

1. Calcule las siguientes operatorias con $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2, j(x) = 5(x-2)^2$
   a) $(f+g)(x) =$
   b) $(g-f)(x) =$
   c) $(g-j)(x) =$
   d) $(j \div f)(x) =$
2. ¿Por qué para la división se pide una condición extra?
3. ¿Las relaciones resultantes $(f \pm g)(x), (f \cdot g)(x)$ y $(f \div g)(x)$ son funciones? Explique.

Existe, además otro tipo de operatoria exclusiva de las funciones para representar el hecho cuando se tienen 2 funciones, f y g de la imagen.



Entonces uno se pregunta:
¿Cuál es la relación entre $X = \{a, b, c, d\}$ y $Z = \{@, \#, !!\}$, de modo que siga la relación sugerida por f y g?
¿Es esa relación una función?

Definición 7. Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ con $C = Recf$, entonces f compuesto en g (fog) se define:

$$(fog)(x) := f(g(x))$$

Nota 2. *¿Por qué es importante la condición de $C = Recf$? BONUS*

Nota 3. *La suma y la multiplicación son operaciones conmutativas, esto es, el orden no altera el resuldo.*
Por el contrario, la resta y la división no lo son, pues $5 - 4 \neq 4 - 5$ y $4 \div 3 \neq 3 \div 4$, por ejemplo.
¿La composición es o no conmutativa? Explique o de un contraejemplo.

Ejemplo 9. Sean $f(x) = 4x$ y $g(x) = 7x^2$, entonces
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(7x^2) = 4(7x^2) = 28x^2$$

3.2. Ejercicios

1. Calcule las siguientes composiciones.

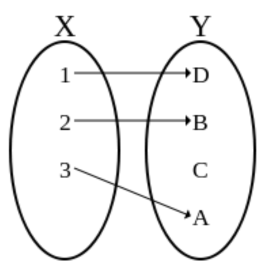
   a) $f(x) = 3x - 1, g(x) = x^2$, calcule $(fog)(x)$

   b) $f(x) = 7x - 1, g(x) = x - 2$, calcule $(fog)(x)$

   c) $f(x) = 9x^2, g(x) = 3x$, calcule $(fog)(x)$

4. Función Inversa

Considere la función f:



En este caso, la relación inversa R tal que asigna : $D \longrightarrow 1, B \longrightarrow 2, A \longrightarrow 3$ y C a nada, ¿Es una función?. ¿Qué condiciones debe cumplir f para que R sea una función?