Guía III Telescópica

Abril 2020

4to Medio - *Procesos Infinitos y Funciones*

Prof. Herma Casanova Morales

Procesos Infinitos

Sumatoria-Propiedades-Fórmulas-

Objetivo

Síntesis Sumatororia
Progresiones

Resumir la definición de sumatoria, las propiedades derivadas de la suma común y propiedades específicas.

Demostrar y ejercitar la obtención de fórmulas para algunas sumas.

Introducir las Progresiones

Sumatorias

$$\Sigma$$

Definición y Elementos

Recordemos que la sumatoria es una forma de escribir una suma común y corriente de manera compacta.

Los elementos de la Sumatoria son :

- Límite inferior y Límite superior de los valores que puede tomar el índice i
- Término General de los Sumandos, esto es, la fórmula que define a los sumandos según el índice

Importante:

- ★ El índice solo toma números enteros
- ★ La cantidad de términos a sumar será igual a la cantidad de valores que puede tomar el índice:
- ★ Límite Superior-Límite inferior+1
- ★ Para cada valor de i, el término general toma un valor, éste puede ser igual a otro, pero no ocurre necesariamente.

$$\sum_{i=l}^{n} a_i$$

Ejercicios

Describa las siguientes sumatorias como suma, cuente la cantidad de sumandos (términos de la suma) y calcule

i) $\sum_{k=4}^{4} k^2$; comparar con $\sum_{j=2}^{5} (j-1)^2$

ii) $\sum_{i=1}^{4} (2i-1)$; comparar con $\sum_{j=3}^{6} (2j-5)$

iii) $\sum_{n=1}^{6} 3$; comparar con $\sum_{j=73}^{78} 3$

iv) $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 3)^2$ sabiendo que $x_1 = 4$; $x_2 = 8$; $x_3 = -4$; $x_4 = 0$

Propiedades

Como la sumatoria es una suma, tiene las mismas propiedades que ésta: conmutativa, asociativa, distributiva, etc

Propiedad Aditiva: *separa los sumandos en suma de sumatorias*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Propiedad Homogénea o Factorización: *el factor común entre los sumandos lo deja fuera de la sumatoria*

$$\sum_{n=1}^{n} c a_k = c \sum_{n=1}^{n} a_k$$

Aplique las propiedades en el cálculo de las siguientes sumatorias:

i) $\sum_{k=1}^{4} k^2 + 2k - 1$

ii) $\sum_{k=1}^{4} 8k^2$

iii) $\sum_{i=1}^{80} 3i - 2$

Propiedad telescópica 

Digamos que he hecho un intercambio un tanto intrincado con m
hermano, consiste en:

El me entregará un libro y yo le daré uno de mi colección. Al día siguiente él me entregará el que que dí el día anterior y yo le entregaré otro de mi colección. Así sucesivamente

Día 1: Él me entregará el libro “El Perfume” y a cambio yo le doy el libro “El Proceso”.

Día 2: Él me entrega “El Proceso” y yo le doy el libro “Chilenes Rebeldes”

….

AL CABO DE UNA SEMANA (7 DÍAS) CON QUÉ LIBRO QUE NO TENÍA EN LA COLECCIÓN ME QUEDARÉ

En el mismo periodo, cuántos libros de mi colección ya no tendré?

Propiedad Telescópica

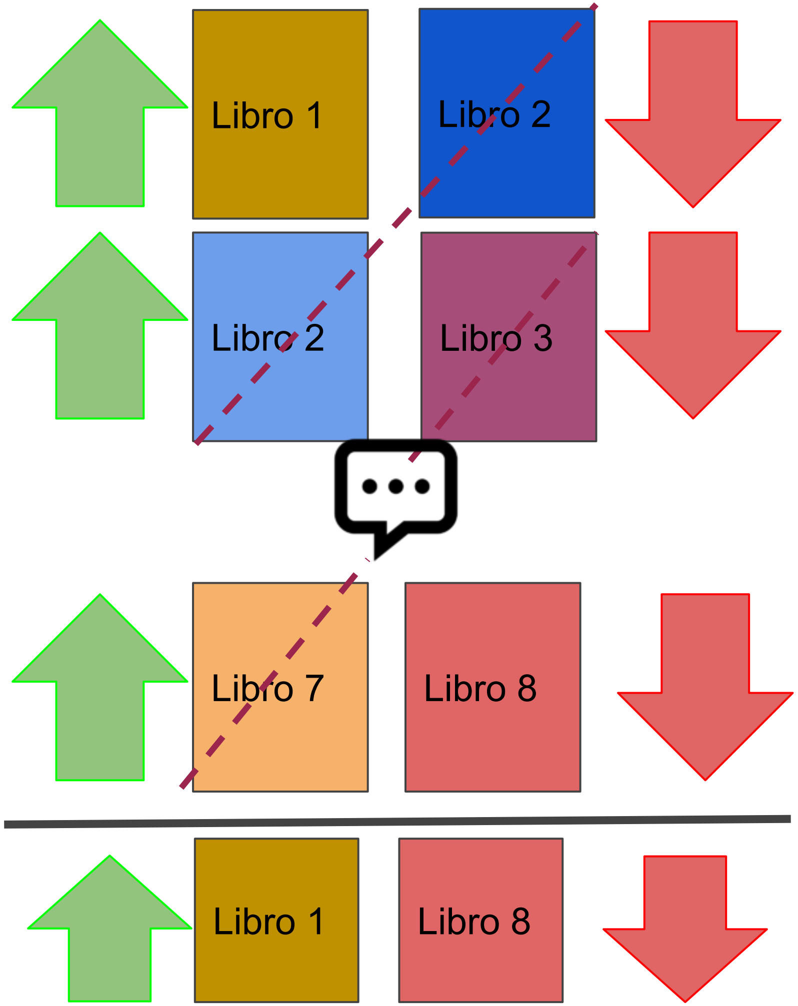
La propiedad telescópica es útil en situaciones como las anteriores, cuando en un momento restamos un término, pero luego en otro momento lo sumamos nuevamente, en el fondo, ésto no tendrá efecto para la suma final.

$$\ldots+5\ldots-4\ -5\ldots+4\ldots$$

Se cancelan mutuamente

Propiedad Telescópica

En el ejemplo, yo entrego un libro que luego me devolverán al día siguiente, por eso al final de una semana yo solo he de considerar el primer libro que me entregaron “libro 1” y el último libro que entregué “libro 8”



Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2 - k^2 = \overbrace{2^2 - 1^2}^{\text{1ER TÉRMINO. }K=1} + \overbrace{3^2 - 2^2}^{\text{2DO TÉRMINO. }K=2} + \overbrace{4^2 - 3^2}^{\text{3ER TÉRMINO. }K=3} + \overbrace{5^2 - 4^2}^{\text{4TO TÉRMINO }K=4} + \overbrace{6^2 - 5^2}^{\text{5TO TÉRMINO. }K=5}$$

Pasar de la notación en sumatoria a la notación en suma

Observe, antes de calcular los cuadrados que el 2 al cuadrado aparece luego restándose. Lo mismo ocurre con el 3 al cuadrado, el cuatro y el cinco, cada uno al cuadrado

$$\cancel{2^2} \boxed{-\ 1^2} + \cancel{3^2} - \cancel{2^2} + \cancel{4^2} - \cancel{3^2} + \cancel{5^2} - \cancel{4^2} \boxed{+\ 6^2} - \cancel{5^2} = 6^2 - 1^2$$

Quedando solamente el −1 y el 6 al cuadrado. Por lo tanto, del primer término quedó el que se resta y del último el que se suma

Telescópica

Por lo tanto, en la propiedad telescópica se eliminan términos centrales quedando algo del inicio y solo algo del final operandose.

Actividad

Calcule las siguientes sumas considerando

$n = 40$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^2 - k^2$

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$

Generalice los resultados anteriores para cualquier valor de n

Fórmulas

Fórmulas

Trabajando ciertas sumas de una manera particular, podemos obtener el resultado de ellas sumas y generalizarlas mediante una fórmula dependiente de los límites para el índice y/o la cantidad de términos sumándose.

- ❑ Sumas de los primeros N números naturales
- ❑ Suma de los primeros N números pares
- ❑ Suma de los primeros N números impares
- ❑ Suma de las primeras N potencias de un número A
- ❑ Suma de los primeros N cuadrados perfectos
- ❑ Suma de los primeros N cubos perfectos

Sumas de los primeros 100 números naturales

$$1+2+3+\ldots.+55+56+\ldots+97+98+99+100$$

55

...

3

2

1

$$101 + 101 + 101 + 101$$

Sumas de los primeros 100 números naturales

$$1+2+3+\ldots.+50+51+\ldots+97+98+99+100$$

50

...

3

2

1

$$\left.\begin{array}{c} 101 \\ + \\ 101 \\ + \\ 101 \\ + \\ 101 \end{array}\right\}$$

¿Cuántas veces se suma 101?
50 veces.
Por lo tanto sumar los 101 primeros números es equivalente a $101 \cdot 50 = 5050$

¿Cómo procedimos?

1. Sumamos el primer término con el último (100+1=101)
2. La cantidad de veces que obtuvimos ese resultado fue la mitad de términos (100/2 = 50)
3. Multiplicamos ambos ($50 \cdot 101 = 5050$)

Luego, al sumar los n primeros números naturales 1+2+3+4+.....+n-1+n procederemos igual

1. Sumamos el primer término con el último (n+1)
2. La cantidad de veces que obtendremos ese resultado será la mitad de términos (n/2)
3. Multiplicamos ambos términos ([n+1]n)/2

Actividad

1. Soluciona: Si N es número impar, entonces tendremos que N/2 será un decimal, ¿cómo solucionamos esto al sumar los primeros N Números? Explica.
2. Obtén una fórmula para las siguientes sumas:
   a. Suma de los primeros N números pares
   b. Suma de los primeros N números impares
3. Elige una de las siguientes sumas y averigua cuál es la fórmula.
   a. Suma de los primeros N cuadrados perfectos
   b. Suma de los primeros N cubos perfectos
4. Realiza la suma de las primeras 5 potencias de A en los siguientes casos: A=1, A menor a 1 y A mayor a 1.

Próxima Guía

- ❑ Cierre de las sumatorias con últimas propiedades.
- ❑ Desarrollo de las progresiones, sus propiedades y aplicaciones

Considera las siguientes dos sucesiones de números, en cada una ¿Qué número sigue? ¿Cómo lo calculó?

A. 5, 11, 17, 23, 29...
B. 5, 10, 20, 40, 80

Coorporación Educacional A&G
Colegio El Prado
Cooperativa nro 7029- Pudahuel.
www.colegioelprado.cl
direccioncolegioelprado@gmail.com
RBD: 24790-1

No es necesario imprimir. Difundir. Quédate en Casa